เฉลย homework #9

Problem 9.7

อ้างถึง wave equation ใน 3 มิติ สำหรับ EM wave ที่มีอัตราเร็วเป็น c

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

ถ้า $\boldsymbol{E} = E(y,z)\mathbf{n}\cos(\omega t - k_x x)$ เป็น *solution* ของ *wave equation* ข้างต้น เมื่อแทน $\boldsymbol{E}$ ใน *wave equation* จะได้

$$\frac{\partial^2 E(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(y,z)}{\partial z^2} = -k^2 E(y,z)$$

โดยที่ $k^2 = \omega^2/c^2 - k_x^2$ และ เนื่องจาก $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2$ ดังนั้นในที่นี้ $k_y^2 + k_z^2 = k^2$ ซึ่งเราจะใช้ข้อมูลนี้ในการแก้ปัญหา *problem 9.8*

Problem 9.8

อ้างถึง *solution* ของ *wave function* ใน *problem 9.7 :* $\boldsymbol{E} = E(y,z)\mathbf{n}\cos(\omega t - k_x x)$ เราสามารถหาสมการสำหรับ $E(y,z)$ ได้จากการหา *solution* จาก

$$\frac{\partial^2 E(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(y,z)}{\partial z^2} = -k^2 E(y,z) \qquad (1)$$

เราจะใช้วิธีการ *separation of variable* ในการหา *explicit form* ของ $E(y,z)$

กำหนด $E(y,z) = Y(y)Z(z)$ และแทนลงไปใน *(1)* ได้

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 YZ$$

เมื่อ หารด้วย *YZ* ตลอด เราได้

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2$$

เนื่องจาก $k_y^2 + k_z^2 = k^2$ ดังนั้น

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 \qquad (2)$$

และ

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^2 \qquad (3)$$

Solution สำหรับสมการที่ *(2)* และ *(3)* ในรูปทั่วไปเขียนได้เป็น

$$Y = A\sin k_y y + B\cos k_y y \qquad (4)$$

และ

$$Z = C\sin k_z z + D\cos k_z z \qquad (5)$$

$\therefore$ *complete solution* สำหรับ *wave* ที่เคลื่อนที่ไปทางแกน *x* เขียนได้เป็น

$$E_x = YZ\cos(\omega t - k_x x) \qquad (6)$$

แทน *(4)* และ *(5)* ใน *(6);*

$$E_x = (A\sin k_y y + B\cos k_y y)(C\sin k_z z + D\cos k_z z)\cos(\omega t - k_x x) \qquad (7)$$

โดยอาศัย *boundary condition* เราสามารถเขียน *wave function* สำหรับกรณีที่เกิดการ *propagate* ใน *rectangular hollow waveguide* ได้ดังนี้

ที่ *y = 0 ,* $E_x = 0$ *at all times:* $0 = (B)(C\sin k_z z + D\cos k_z z)\cos(\omega t - k_x x)$ ดังนั้น *B = 0;*

ในทำนองเดียวกัน

ที่ *z = 0,* $E_x = 0$ *at all times:* $0 = (A\sin k_y y)(D)\cos(\omega t - k_x x)$ ดังนั้น *D = 0;*

$$\therefore E_x = (A\sin k_y y)(C\sin k_z z)\cos(\omega t - k_x x) \qquad (8)$$

ที่ *y = a* และ *z = b,* $E_x = 0$ *at all times* ดังนั้น $k_y a = m\pi \rightarrow k_y = \frac{m\pi}{a}$ *(9)*

และ $k_z b = n\pi \rightarrow k_z = \frac{n\pi}{b}$ *(10)*

แทน *(9)* และ *(10)* ลงใน *(8)* จะได้ *solution* เป็น

$$E_x = (A\sin\frac{m\pi}{a}y)(C\sin\frac{n\pi}{b}z)\cos(\omega t - k_x x) \qquad (11)$$

โดยที่ $k^2 = k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$ เมื่อ *m,n* คือ *1,2,3,…*

Problem 9.9

เนื่องจาก $k^2 = \omega^2/c^2 - k_x^2$ หรือ $k_x^2 = \omega^2/c^2 - k^2$ ซึ่ง k_x^2 จะเป็นค่า real ก็ต่อเมื่อ $\omega^2/c^2 \geq k^2$ หรือ

$$\omega^2/c^2 \geq \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

โดยมีค่าต่ำสุดของ ω อยู่ที่ m = n = 1 หรือ $\omega^2/c^2 = \pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$ #